بررسی روش نگاشت نمایی یک‌چهارم گام برای تابع‌اولیه‌گیری از مومسانی وان- مایسز*

نادر حاجی‌آقاجان‌پور[۱]   مهرزاد شریفیان[۲]   مهرداد شریفیان[۳]

چکیده *به‌هنگام‌سازی تنش در تحلیل اجزای محدود ناخطی مواد، مهم‌ترین قسمت تحلیل می‌باشد، زیرا به‌طور قابل‌توجهی بر دقت پاسخ‌های به‌دست‌آمده اثرگذار است. باتوجه به این‌که دقت و زمان دو عامل کلیدی در کارایی روش‌های تابع‌اولیه‌گیری هستند، بررسی دقت و عملکرد این روش‌ها اهمیت بسیاری دارد. در این پژوهش، الگوی مومسانی وان- مایسز با سخت‌شوندگی‌های خطی همگن و پویا در محدودهٔ تغییرشکل‌های کوچک درنظر گرفته می‌شود. باید دانست در حل دستگاه معادله‌های دیفرانسیل مومسانی به‌روش نیمه‌ضمنی رویکرد رایج این‌گونه است که متغیرهای مورد نیاز تحلیل از میانهٔ گام مومسانی برداشت شود. به‌منظور بررسی دقت در این پژوهش رابطه‌سازی‌ها به‌گونه‌ای انجام شده‌است که بتوان متغیرها را از یک‌چهارم گام مومسانی برداشت نمود. درپایان، با انجام آزمون‌های عددی، دقت پاسخ‌های به‌دست‌آمده از این حالت بررسی می‌شود و با حالت رایج مقایسه می‌گردد.*

واژه‌های کلیدی به‌هنگام‌سازی تنش، روش نیمه‌ضمنی، مومسانی وان- مایسز، سخت‌شوندگی همگن، سخت‌شوندگی پویا.

Verification of Quarter-step Exponential Map Method for Integration of Von-Mises Plasticity

N. Haji Aghajanpour   M. Sharifian   M. Sharifian

Abstract *Updating stress in a nonlinear finite element analysis is the most important part as the precision of the stress-updating algorithm greatly affects the accuracy of the final solutions.The most important part of the analysis is the stress-updating. There are two key factors that have impact on the efficiency evaluation; those are the accuracy and time. Based on this point, investigating the accuracy of the integration methods becomes important. In this study, the von-Mises plasticity model along with the linear isotropic and kinematic hardening mechanisms is considered in the small strain realm. In solving the plasticity differential equations system through a semi-implicit method, the prevalent approach is picking up the variables from the middle of the plasticity step. In order to assess the accuracy, here, the relations are derived so that one can pick up the variables from the first quarter of the plasticity step. Finally, to determine the accuracy and comparing two aforementioned methods, the numerical tests are performed.*

Key Words Stress updating; Semi-implicit method; Von-Mises plasticity; Isotropic hardening; Kinematic hardening.

---

*تاریخ دریافت مقاله ۹۶/۳/۱۸ و تاریخ پذیرش آن ۹۶/۹/۱۸ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v30i1.64973

(۱) کارشناس ارشد، مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی قوچان.

(۲) نویسندهٔ مسئول: استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی قوچان. m.sharifian@qiet.ac.ir

(۳) استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی قوچان.

مقدمه

روش‌های تابع‌اولیه‌گیری از معادله‌های دیفرانسیلی مومسانی شامل چهار گونهٔ اصلیِ صریح، ضمنی، دقیق و نگاشت نمایی می‌باشند. روش‌های رانگ- کوتا از معروف‌ترین روش‌های صریح در تابع‌اولیه‌گیری می‌باشند. تابع‌اولیه‌گیری‌های ضمنی که بیشتر با عنوان روش‌های نگاشت بازگشتی شناخته می‌شوند، نخست با روش بازگشت شعاعی که توسط ویکلینز برای معیار تسلیم وان- مایسز مطلوب پیشنهاد شد، مطرح گردید [1]. در رابطه با روش‌های دقیق بایستی اشاره گردد با ثابت‌پنداشتن نرخ کرنش، نخستین حل بسته برای مصالح کشسان- مومسان مطلوب وان- مایسز توسط کریگ و کریگ [2] ارائه شد. پس از آن پژوهشگران دستاورد کریگ و کریگ را بهبود دادند. ریستینما و تریادینگ [3] در سال ۱۹۹۳ یک روش کلی استخراج نمودند که شامل همهٔ روش‌های دقیق پیشین بود. درادامه، زابو [4] نیز پژوهش‌هایی روی شیوه‌های دقیق انجام داد. باید دانست در روش‌های برپایهٔ نگاشت نمایی تابع‌اولیه‌گیری در فضای تنش افزوده انجام می‌شود. باتوجه به این‌که حجم محاسبات در تحلیل‌های ناخطی بسیار زیاد است؛ بنابراین انتخاب روش دقیق‌تر برای تحلیل می‌تواند زمان تحلیل را به‌شکل چشم‌گیری کاهش دهد و در زمان کمتری به‌دقت موردنظر برسد. از میان روش‌های بیان‌شده، شیوه‌های برپایهٔ نگاشت نمایی دقت بالاتری دارند، افزون‌بر آن، سازگاری مومسانی در بیشتر آنها وجود دارد. از سوی دیگر، ماهیت صریح روش‌های برپایه نگاشت نمایی کارایی بالاتر این روش‌ها را سبب می‌شود. ویژگی‌های یادشده، نویسندگان این مقاله را بر آن داشت که بررسی دقت روش‌های تابع‌اولیه‌گیری نمایی را در پیش گیرند.

پس از آن‌که هانگ و لیو [5] در سال ۱۹۹۹ فضای تنش افزوده را معرفی کردند، پژوهشگران معادله‌های مربوط به مومسانی وان- مایسز با سخت‌شوندگی درهم خطی را به دستگاه معادلهٔ دیفرانسیل ناخطی $\dot{\mathbf{X}} = \mathbb{A}\mathbf{X}$ تبدیل نمودند. در سال ۲۰۰۳ آوریکیو و ویگا [6] روش تابع‌اولیه‌گیری نمایی از این معادلهٔ دیفرانسیل را پیشنهاد نمودند. روش آنها ماهیت صریح داشت و ناسازگار با سطح تسلیم بود. در روش‌های سازگار با سطح تسلیم در انتهای هر گام بارگذاری، تنش‌های به‌هنگام‌شده به‌طور خودکار برروی سطح تسلیم قرار می‌گیرد درحالی‌که در روش‌های ناسازگار بایستی تنش‌ها برروی سطح تسلیم بازگردانده شوند. در سال ۲۰۰٤، لیو [7] دو روش تابع‌اولیه‌گیری نمایی صریح برای معیار تسلیم مومسان مطلوب دراکر- پراگر رابطه‌سازی نمود.

ازجمله پژوهشگرانی که درزمینهٔ تابع‌اولیه‌گیری نمایی از معادله‌های مومسانی فعالیت کرده‌اند، می‌توان به آرتیولی و همکارانش [8] اشاره نمود. آنها در سال ۲۰۰۵، شیوهٔ نمایی برای مومسانی وان- مایسز را به حالت سازگار بهبود دادند، و در سال ۲۰۰٦ [9] یک شیوه نمایی صریح مرتبه‌دوم برای الگوی سخت‌شوندهٔ خطی وان- مایسز پیشنهاد دادند. آرتیولی و همکارانش [10] در سال ۲۰۰۷، شیوهٔ به‌هنگام‌سازی نمایی تنش را برای مومسانی وان- مایسز با سخت‌شوندگی همگن خطی و پویای ناخطی آرمسترانگ و فردریک استخراج نمودند.

رضایی پژند و نصیرایی [11] در ادامهٔ فعالیت‌های سال ۲۰۰۵ آرتیولی و همکارانش، شیوهٔ نمایی برای مومسانی وان- مایسز را در سال ۲۰۰۷ به یک شیوهٔ تابع‌اولیه‌گیری نمایی نیمه‌ضمنی با دقت مرتبه‌دو بهبود دادند. سپس، در سال ۲۰۰۸ [12]، دو شیوهٔ تابع‌اولیه‌گیری نمایی نیمه‌ضمنی مرتبه‌دو را برای الگوی مومسان مطلوب دراکر- پراگر پیشنهاد دادند. رضایی پژند و همکارانش [13] در سال ۲۰۱۰ روش تابع‌اولیه‌گیری نمایی را برای مومسانی وان- مایسز با سخت‌شوندگی پویای ناخطی گسترش دادند و در سال

۲۰۱۱ یک روش تابع‌اولیه‌گیری نمایی برای مدل مومسانی چرخه‌ای ارائه کردند [14]. رضایی پژند و شریفیان [5] در سال ۲۰۱۱ یک روش تابع‌اولیه‌گیری با قابلیت کنترل خودکار خطا پیشنهاد نمودند. افزون‌بر آن، رضایی پژند و همکاران [16] در سال ۲۰۱۱ دو روش تابع‌اولیه‌گیری صریح برپایهٔ نگاشت نمایی با سخت‌شوندگی همگن خطی و پویای پراگر ارائه دادند. سرانجام، رضایی پژند و همکاران [17] در سال ۲۰۱۳، دو روش تابع‌اولیه‌گیری نیمه‌ضمنی برپایهٔ نگاشت نمایی و شیوه‌های اولر پیشرو و پسرو برای مومسانی دراکر- پراگر با سخت‌شوندگی درهم ناخطی رابطه‌سازی کردند.

همان‌گونه که بیان شد دقت روش تابع‌اولیه‌گیری در کارایی آن روش اثر به‌سزایی دارد. از طرفی در پژوهش‌های صورت‌گرفته دررابطه با روش نیمه‌ضمنی نگاشت نمایی رویکرد رایج چنین است که متغیرهای مورد نیاز تحلیل از وسط گام مومسانی برداشت شود. در این پژوهش بررسی می‌شود که برداشت متغیرها از یک‌چهارم گام مومسانی چه اثری بر دقت پاسخ‌ها و نرخ همگرایی به پاسخ دقیق می‌گذارد. برای این منظور روش نگاشت نمایی برای مومسانی وان- مایسز با سخت‌شوندگی همگن و پویای خطی به‌گونه‌ای رابطه‌سازی خواهد شد که بتوان شعاع سطح تسلیم را از یک‌چهارم گام مومسانی برداشت نمود.

در رابطه‌هایی که در این مقاله ارائه می‌شود تانسورهای مرتبه‌دو با برداری نُه‌مؤلفه‌ای جایگزین شده‌اند، همانند:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \; \tau_{yx} \quad \sigma_y \quad \tau_{yz} \; \tau_{zx} \quad \tau_{zy} \quad \sigma_z] \quad (۱)$$

البته باتوجه به این‌که شمار مؤلفه‌های مستقل، شش عدد می‌باشد؛ چنان‌چه استفاده از بردارهای شش‌مؤلفه‌ای موردنظر باشد، بایستی عملگر اثر و نرم اقلیدسی اصلاح گردند.

رابطه‌های بنیادی

یک الگوی مومسانی وان- مایسز با سخت‌شوندگی درهم خطی در محدودهٔ تغییرشکل‌های کوچک درنظر گرفته می‌شود. تنش کل و کرنش کل هر کدام به دو بخش انحرافی و حجمی جداسازی می‌شوند:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} + p\mathbf{i} \;, \quad p = \tfrac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma}) \quad (۲)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} + \tfrac{1}{3}\theta\mathbf{i} \;, \quad \theta = tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (۳)$$

معادله‌های وابسته به این الگو درادامه آورده می‌شود:

$$p = K\theta \quad (٤)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^{\mathrm{p}} + \mathbf{e}^{\mathrm{e}} \quad (۵)$$

$$\mathbf{s} = 2G\mathbf{e}^{\mathrm{e}} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{\mathrm{p}}) \quad (٦)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha} \quad (۷)$$

$$F = \|\boldsymbol{\Sigma}\| - R = 0 \quad (۸)$$

$$R = R_0 + H_{\mathrm{iso}}\gamma \quad (۹)$$

$$\dot{\mathbf{e}}^{p} = \dot{\gamma}\mathbf{n} \quad (۱۰)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{\|\boldsymbol{\Sigma}\|} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{R} \quad (۱۱)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = H_{\mathrm{kin}}\dot{\mathbf{e}}^{\mathrm{p}} \quad (۱۲)$$

که $\mathrm{tr}(\,)$ عملگر اثر است ($tr(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$)، $\mathbf{i}$ بردار معادل با تانسور همانی مرتبه 2، $\mathbf{s}$ تنش انحرافی، p تنش حجمی، $\mathbf{e}$ کرنش انحرافی و θ کرنش حجمی می‌باشد. K مدول بالک، $\mathbf{e}^{\mathrm{e}}$ بخش کشسان و $\mathbf{e}^{\mathrm{p}}$ بخش مومسان کرنش انحرافی، $\boldsymbol{\Sigma}$ بردار تنش انتقالی (جابه‌جاشده)، $\boldsymbol{\alpha}$ بخش انحرافی تنش بازگشتی، $\mathbf{n}$

بردار عمود بر سطح تسلیم در نقطهٔ تماس می‌باشد. R شعاع سطح تسلیم، R_0 شعاع نخستین سطح تسلیم، H_{iso} ثابت ماده (ثابت سخت‌شوندگی همگن)، H_{kin} ثابت ماده (ثابت سخت‌شوندگی پویا)، γ یک کمیت عددی می‌باشد که $\dot{\gamma}$ ضریب مومسانی را تعریف می‌کند. رابطهٔ (۸) سطح تسلیم وان- مایسز را بیان می‌کند. $\boldsymbol{\alpha}$ مرکز سطح تسلیم در صفحهٔ تنش انحرافی می‌باشد. رابطهٔ (۹) قانون سخت‌شوندگی همگن خطی را نشان می‌دهد. رابطهٔ (۱۲) بیانگر قانون سخت‌شوندگی پویای خطی پراگر می‌باشد.

سرانجام، شرط‌های بارگذاری- باربرداری کان- تاکر با رابطه‌های زیر ارائه می‌شود [6]:

$$\dot{\gamma} \geq 0 \ , \ F \leq 0 \ , \ \dot{\gamma}F = 0 \tag{۱۳}$$

که $\dot{\gamma}=0$ رفتار کشسان و $\dot{\gamma}>0$ رفتار مومسان را نشان می‌دهد.

رابطه‌های بنیادی در فضای تنش افزوده

معادله‌های مربوط به مومسانی وان- مایسز با سخت‌شوندگی درهم خطی را می‌توان به دستگاه معادلهٔ دیفرانسیل ناخطی زیر تبدیل نمود [6]:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbb{A}\mathbf{X} \tag{۱۴}$$

در رابطهٔ بالا $\mathbf{X}$ بردار تنش افزوده با $n+1$ بُعد می‌باشد:

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} X^0\overline{\boldsymbol{\Sigma}} \\ X^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}^s \\ X^0 \end{Bmatrix} \tag{۱۵}$$

بردار تنش جابه‌جاشدهٔ بدون بُعد ($\overline{\boldsymbol{\Sigma}}$) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\overline{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{R} \tag{۱۶}$$

ضریب انتگرال‌گیری X^0 به‌صورت تابعی از γ درنظر گرفته می‌شود:

$$X^0(\gamma) = \begin{cases} \left(1 + \frac{H_{\text{iso}}}{R_0}\gamma\right)^{\left(\frac{2G+H_{\text{kin}}+H_{\text{iso}}}{H_{\text{iso}}}\right)} & H_{\text{iso}} \neq 0 \\ \exp\left(\frac{2G+H_{\text{kin}}}{R_0}\gamma\right) & H_{\text{iso}} = 0 \end{cases} \tag{۱۷}$$

ماتریس $\mathbb{A}$ برای معادلهٔ دیفرانسیل (۱٤) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\text{محدودهٔ کشسان}: \ \mathbb{A}_{\mathbf{e}} = \frac{2G}{R}\begin{bmatrix} \mathbb{O}_{9\times 9} & \dot{\mathbf{e}}_{9\times 1} \\ \mathbf{0}_{1\times 9} & 0 \end{bmatrix}_{10\times 10} \tag{۱۸}$$

$$\text{محدودهٔ مومسان}: \ \mathbb{A}_{\mathbf{p}} = \frac{2G}{R}\begin{bmatrix} \mathbb{O}_{9\times 9} & \dot{\mathbf{e}}_{9\times 1} \\ \dot{\mathbf{e}}^T{}_{1\times 9} & 0 \end{bmatrix}_{10\times 10} \tag{۱۹}$$

درحضور سخت‌شوندگی پویا به‌تنهایی چون R ثابت است، $\mathbb{A}$ تنها به $\dot{\mathbf{e}}$ وابسته است؛ اما درحضور سخت‌شوندگی همگن که R ثابت نمی‌باشد، $\mathbb{A}$ به $\mathbf{X}$ وابسته می‌شود که معادلهٔ (۱٤) را ناخطی می‌کند. چگونگی دست‌یابی به معادلهٔ $\dot{\mathbf{X}} = \mathbb{A}\mathbf{X}$ در پیوست ارائه شده‌است.

چنان‌چه دو شرط زیر که از شرط‌های کان- تاکر (۱۳) نتیجه گرفته شده‌است، به‌صورت هم‌زمان برقرار شود، نمو در محدودهٔ مومسان واقع است [4]:

۱) تنش جابه‌جاشده بایستی روی سطح تسلیم باشد:

$$\|\boldsymbol{\Sigma}\| = R \tag{۲۰}$$

که بااستفاده از رابطه‌های (۱۵ و ۱٦) می‌توان نوشت:

$$\|\mathbf{X}^s\| = X^0 \tag{۲۱}$$

۲) جهت رُشد کرنش باید به‌سوی بیرون از سطح تسلیم باشد:

$$\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{e}} > 0 \tag{۲۲}$$

که رابطهٔ کنونی را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی

نمود:

$$(\mathbf{X}^s)^T\dot{\mathbf{e}} > 0 \tag{۲۳}$$

الگوریتم عددی به‌هنگام‌سازی تنش

در این بخش الگوریتم عددی به‌هنگام‌سازی تنش ارائه می‌گردد. الگوریتمی که درادامه می‌آید باالگوریتم روش صریح نگاشت‌نمایی تفاوت دارد. در این الگوریتم در محاسبات به‌هنگام‌سازی تنش از شعاع سطح تسلیمی استفاده می‌گردد که از یک‌چهارم گام مومسانی برداشت شده‌است. رابطه‌سازی‌هایی که به این منظور صورت پذیرفته، در محاسبات مربوط به گام مومسانی به روشنی قابل‌مشاهده است.

در فرایند به‌هنگام‌سازی تنش، مقدارهای متغیرها در زمان $t = t_n$ ($\gamma_n, \boldsymbol{\alpha}_n, \mathbf{e}_n, \mathbf{s}_n$) و کرنش در زمان $t = t_{n+1}$ ($\mathbf{e}_{n+1}$) معلوم می‌باشند. الگوریتم پیشنهادی بایستی با حل معادلات مومسانی، تنش را به‌هنگام کند و سایر متغیرها را محاسبه نماید. پاسخ معادلهٔ دیفرانسیل (۱٤) با شرط نخستین زیر درادامه آورده می‌شود. شایان ذکر است به‌صورت معمول در مسیرهای کرنش انتخابی، نرخ کرنش ثابت فرض می‌شود ($\dot{\mathbf{e}} = \text{cte}$).

$$\mathbf{X}(0) = \begin{Bmatrix}\mathbf{X}_0^s \\ 1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\frac{\boldsymbol{\Sigma}_0}{R_0} \\ 1\end{Bmatrix} \tag{۲٤}$$

$$\mathbf{X}_{n+1} = \exp(\mathbb{A}.\Delta t)\,\mathbf{X}_n \tag{۲۵}$$

باتوجه به این‌که در حضور سخت‌شوندگی همگن ($H_{\text{iso}} \neq 0$) ماتریس $\mathbb{A}$ در فاز مومسانی ثابت نیست، در این‌جا برای یافتن حل بسته، $\mathbb{A}$ در طول هر گام زمانی ثابت پنداشت می‌شود:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \exp(\mathbb{A}_n.\Delta t)\,\mathbf{X}_n = \overline{\mathbb{G}}_n\mathbf{X}_n \tag{۲٦}$$

$$\overline{\mathbb{G}}_n = \begin{cases} \overline{\mathbb{G}}_e = \begin{bmatrix}\mathbb{I}_{9\times9} & \frac{2G}{R_n}\Delta\mathbf{e} \\ 0 & 1\end{bmatrix} \\ \overline{\mathbb{G}}_p = \begin{bmatrix}\mathbb{I} + (a_0 - 1)\Delta\hat{\mathbf{e}}\Delta\hat{\mathbf{e}}^T & b_0\Delta\hat{\mathbf{e}} \\ b_0\Delta\hat{\mathbf{e}}^T & a_0\end{bmatrix}\end{cases} \tag{۲۷}$$

عامل‌های مربوط به ماتریس نمایی $\overline{\mathbb{G}}_n$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\Delta\mathbf{e} = \mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n\,, \quad \Delta\hat{\mathbf{e}} = \frac{\Delta\mathbf{e}}{\|\Delta\mathbf{e}\|} \tag{۲۸}$$

$$a_0 = \cosh\left(\frac{2G}{R_n}\|\Delta\mathbf{e}\|\right)\,,\ b_0 = \sinh\left(\frac{2G}{R_n}\|\Delta\mathbf{e}\|\right) \tag{۲۹}$$

نخست با پنداشت رفتار ارتجاعی یک مقدار نخستین آزمونی برای بردار تنش افزوده برآورد می‌گردد:

$$\mathbf{X}_{n+1}^{TR} = \overline{\mathbb{G}}_e\mathbf{X}_n \tag{۳۰}$$

درصورت برقراری شرط زیر، حل آزمونی پذیرفته می‌شود و مقدارهای متغیرها از روی حل آزمونی بالا برآورد می‌گردد؛

$$\|\mathbf{X}_{n+1}^{s,TR}\| \leq X_{n+1}^{0,TR} \tag{۳۱}$$

اما درصورت برقرار نشدن شرط (۳۱) حل آزمونی پذیرفته نمی‌شود و بخشی از گام، مومسان می‌باشد. به‌صورت معمول، این گام به دو قسمت کشسان کامل و کشسان- مومسان تقسیم می‌شود. مرز بین ناحیهٔ کشسان کامل و ناحیهٔ کشسان- مومسان را ثابت $0 \leq \alpha \leq 1$ مشخص می‌کند:

$$\alpha = \frac{\sqrt{C^2 - DM} - C}{D} \tag{۳۲}$$

$$C = \frac{2GX_n^0}{R_n}\mathbf{X}_n^s\Delta\mathbf{e}\ ,\ D = \left(\frac{2GX_n^0\|\Delta\mathbf{e}\|}{R_n}\right)^2\ , \quad M = \|\mathbf{X}_n^s\|^2 - (X_n^0)^2 \tag{۳۳}$$

درحقیقت، $\alpha\Delta\mathbf{e}$ بیانگر یک بخش کشسان کامل و $(1-\alpha)\Delta\mathbf{e}$ بیانگر یک بخش کشسان- مومسان کامل می‌باشد. دراین‌صورت بردار تنش افزوده به‌شرح زیر به‌هنگام می‌گردد:

$$\mathbf{X}_{n+\alpha} = \mathbb{G}_{\mathrm{e}}\mathbf{X}_n \quad (۳۴)$$

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbb{G}_{\mathrm{p}}\mathbf{X}_{n+\alpha} \quad (۳۵)$$

و یا:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbb{G}_{\mathrm{e}}\mathbb{G}_{\mathrm{p}}\mathbf{X}_n \quad (۳۶)$$

ضریب α برای ناحیهٔ کشسان و $(1-\alpha)$ برای ناحیهٔ کشسان- مومسان در رابطهٔ (۲۷) اعمال می‌شود و $\mathbb{G}_{\mathrm{e}}$ و $\mathbb{G}_{\mathrm{p}}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد. آشکار است که $\alpha = 0$ یک گام کشسان- مومسان را نشان می‌دهد، $\mathbb{G}_e = \mathbb{I}$ و $\mathbb{G}_{\mathrm{p}} = \overline{\mathbb{G}}_{\mathrm{p}}$.

$$\mathbb{G}_n = \begin{cases} \mathbb{G}_{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{9\times 9} & \alpha\frac{2G}{R_n}\Delta\mathbf{e} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbb{G}_{\mathrm{p}} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} + (a_1-1)\Delta\hat{\mathbf{e}}\Delta\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}} & b_1\Delta\hat{\mathbf{e}} \\ b_1\Delta\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}} & a_1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (۳۷)$$

باتوجه به این‌که در روش نیمه‌ضمنی بایستی شعاع برداشت‌شده از یک‌چهارم گام در محاسبات وارد شود، عامل‌های مربوط به ماتریس $\mathbb{G}_n$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$a_1 = \cosh(g)\ ,\ b_1 = \sinh(g) \quad (۳۸)$$

$$g = \frac{2G}{R_{n+\alpha+0.25(1-\alpha)}}(1-\alpha)\|\Delta\mathbf{e}\| \quad (۳۹)$$

برای به‌دست‌آوردن شعاعی که از یک‌چهارم گام مومسانی به‌دست می‌آید $(R_{n+\alpha+0.25(1-\alpha)})$ به‌ترتیب زیر عمل می‌شود:

$$\mathbf{X}^{\mathrm{s}}_{n+\alpha} = \mathbf{X}^{\mathrm{s}}_n + \alpha\frac{2G}{R_n}X^0_n\Delta\mathbf{e} \quad (۴۰)$$

$$X^0_{n+\alpha+0.25(1-\alpha)} = \bar{b}\Delta\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}^{\mathrm{s}}_n + \alpha\frac{2G}{R_n}X^0_n\Delta\mathbf{e}\right) + \bar{a}X^0_n \quad (۴۱)$$

که در آن:

$$\bar{a} = \cosh(0.25\bar{g}) \quad (۴۲)$$

$$\bar{b} = \sinh(0.25\bar{g}) \quad (۴۳)$$

$$\bar{g} = \frac{2G}{R_n}(1-\alpha)\|\Delta\mathbf{e}\| \quad (۴۴)$$

شعاع در یک‌چهارم از گام کشسان- مومسان به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$R_{n+\alpha+0.25(1-\alpha)} = R_n\left(\frac{X^0_{n+\alpha+0.25(1-\alpha)}}{X^0_n}\right)^{\beta} \quad (۴۵)$$

به‌عبارت دیگر:

$$R_{n+\alpha+0.25(1-\alpha)} = R_n\left[\sinh(0.25\bar{g})\left(\frac{\Delta\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{s}}_n}{X^0_n} + \alpha\frac{2G}{R_n}\|\Delta\mathbf{e}\|\right) + \cosh(0.25\bar{g})\right]^{\beta} \quad (۴۶)$$

ضریب β از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود:

$$\beta = \frac{H_{\mathrm{iso}}}{2G + H_{\mathrm{iso}} + H_{\mathrm{kin}}} \quad (۴۷)$$

در پایان هر گام شعاع سطح تسلیم باید به‌هنگام شود که به‌کمک رابطه‌های (۹ و ۱۷) می‌توان به رابطهٔ زیر رسید:

$$R_{n+1} = R_0(X^0_{n+1})^{\beta} \quad (۴۸)$$

باتوجه به این‌که X^0 یک متغیر تاریخچه‌ای نیست و به‌صورت معمول به‌منظور جلوگیری از سرریزشدگی عددی در آغاز هر گام یک درنظر گرفته می‌شود، شعاع

در گام $n+1$ برحسب شعاع در گام n ام محاسبه شود:

$$R_{n+1} = R_0(X_n^0)^\beta \left(\frac{X_{n+1}^0}{X_n^0}\right)^\beta = R_n \left(\frac{X_{n+1}^0}{X_n^0}\right)^\beta \qquad (۴۹)$$

درپایان تنش به‌هنگام می‌شود و مرکز سطح تسلیم به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\mathbf{\Sigma}_{n+1} = \frac{R_{n+1}}{X_{n+1}^0}\mathbf{X}_{n+1}^s \qquad (۵۰)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \frac{H_{\text{kin}}}{2G+H_{\text{kin}}}(2G\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{\Sigma}_{n+1}) \qquad (۵۱)$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{\Sigma}_{n+1} + \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \qquad (۵۲)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1} + K.\theta_{n+1}\mathbf{i} \qquad (۵۳)$$

آزمون‌های عددی

در این بخش ابتدا روش تابع‌اولیه‌گیری یک‌چهارم گام راستی‌آزمایی می‌شود سپس بررسی می‌شود که در فرایند به‌هنگام‌سازی تنش، برداشت شعاع سطح تسلیم از یک‌چهارم گام مومسانی چه اثری بر دقت پاسخ‌ها می‌گذارد. برای رسیدن به این منظور دو تاریخچهٔ بارگذاری کرنش معلوم درنظر گرفته می‌شود (شکل ۱ و ۲)، سپس تنش‌های وابسته برای دو مادهٔ زیر به‌هنگام می‌گردد [9].

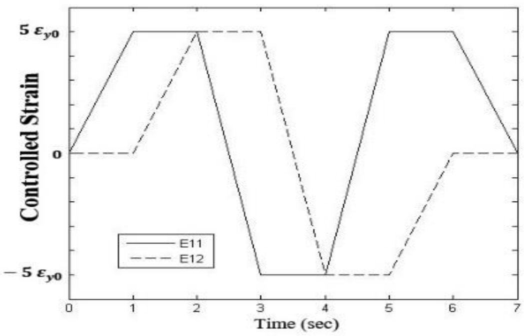
در دو تاریخچهٔ کرنش که در شکل‌های (۱ و ۲) آورده شده‌اند، سایر مؤلفه‌های کرنش صفر می‌باشند. عامل ε_{y0} کرنش نخستین تسلیم را نشان می‌دهد ($\varepsilon_{y0} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{R_0}{E}$).

مادهٔ ۱:

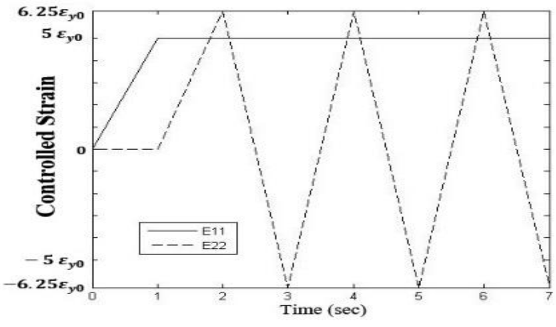
$R_0 = 15$ MPa; $E = 100$ MPa; $\upsilon = 0.3$; $H_{\text{kin}} = 10$ MPa; $H_{\text{iso}} = 10$ MPa;

مادهٔ ۲:

$R_0 = 24.3$ MPa; $E = 7000$ MPa; $\upsilon = 0.3$; $H_{\text{kin}} = 0$ MPa; $H_{\text{iso}} = 225$ MPa;



شکل ۱ تاریخچهٔ بارگذاری کرنش ۱ (مسیر ۱)



شکل ۲ تاریخچهٔ بارگذاری کرنش ۲ (مسیر ۲)

راستی‌آزمایی روش یک‌چهارم گام. به‌منظور راستی‌آزمایی روش تابع‌اولیه‌گیری یک‌چهارم گام، تنش‌ها به‌وسیلهٔ این روش و روش نگاشت نمایی صریح با گام زمانی بسیار کوچک ($\Delta t = 1 \times 10^{-5}\text{sec}$) به‌هنگام می‌شوند که باتوجه به اندازهٔ گام بسیار کوچک انتخاب‌شده باید پاسخ‌های دو روش یکسان باشند. برای سنجش آسان‌تر پاسخ‌های به‌دست‌آمده، نرم اقلیدسی تنش‌ها محاسبه می‌شوند و سپس میانگین نرم تنش‌ها در کل مسیر محاسبه می‌شوند. نتیجهٔ حاصل در جدول (۱) ارائه شده‌است.

جدول ۱ مقایسهٔ میانگین نرم تنش‌ها با روش صریح

مسئلهٔ مورد بررسی	میانگین نرم تنش در کل مسیر (MPa)	
	روش صریح	روش یک‌چهارم گام
مادهٔ ۱ – مسیر ۱	106.6229	106.6229
مادهٔ ۲ – مسیر ۱	143.3956	143.3956
مادهٔ ۱ – مسیر ۲	161.2968	161.2968
مادهٔ ۲ – مسیر ۲	226.3358	226.3358

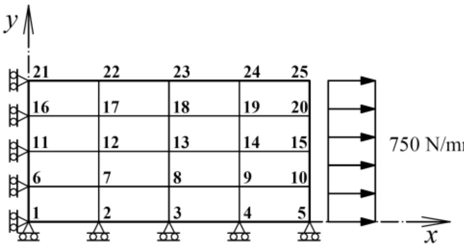
یافته‌های نشان داده‌شده در جدول (۱)، درستی روش یک‌چهارم گام رابطه‌سازی‌شده را نشان داده‌است.

همچنین، برنامهٔ نوشته‌شده برای روش پیشنهادی در یک برنامهٔ اجزای محدود صریح نوشته‌شده توسط نویسندگان به‌کار می‌رود و حل به‌دست‌آمده برای یک مسئله مقدار مرزی با پاسخ‌های نرم‌افزار اجزای محدود FEAP که از شیوهٔ اولر پسرو بهره می‌جوید سنجش می‌گردد. باید دانست روش‌های تابع‌اولیه‌گیری اولر پسرو، نمایی صریح و نیز روش پیشنهادی برای مومسانی وان– مایسز با سخت‌شوندگی پویای خطی دارای پاسخ‌های دقیق می‌باشند. بنابراین، برای یک نوع فولاد کربنی با مشخصه‌های مکانیکی زیر که تنها برای آن سخت‌شوندگی پویا درنظر گرفته می‌شود، یک صفحهٔ مستطیلی زیر بار کششی تحلیل می‌گردد.

فولاد کربنی:

$R_0 = 106$ MPa; $E = 181330$ MPa; $\upsilon = 0.302$;
$H_{\text{kin}} = 200000$ MPa; $H_{\text{iso}} = 0$ MPa;

صفحهٔ موردنظر به‌طول 320 mm و عرض 160 mm و ضخامت یکه می‌باشد که باتوجه به تقارن می‌توان یک‌چهارم صفحه را تحلیل کرد (شکل ۳). بار وارد در یک نمو وارد می‌گردد و به‌اندازهٔ کافی بزرگ می‌باشد تا مصالح وارد ناحیهٔ مومسانی شوند. نتایج حاصل از تحلیل در جدول (۲) آورده شده‌است که شامل تغییرمکان‌های گرهی برای x گره‌های ۱ تا ۵ می‌باشد. یافته‌ها نشان می‌دهد که پاسخ‌های به‌دست‌آمده با روش یک‌چهارم گام و برنامهٔ رایانه‌ای نوشته‌شده توسط نویسندگان، با پاسخ‌های به‌دست‌آمده با روش اولر پسرو و برنامهٔ FEAP یکسان می‌باشد و درستی روش تابع‌اولیه‌گیری را در حل یک مسئلهٔ اجزای محدود نشان می‌دهد.



شکل ۳ یک‌چهارم صفحهٔ مستطیلی زیر بار کششی

جدول ۲ مقایسهٔ تغییرمکان‌های به‌دست‌آمده از تحلیل‌ها (mm)

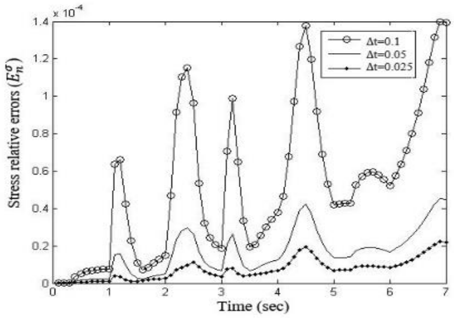
شماره گره	پاسخ‌های به‌دست‌آمده از روش اجزای محدود	
	روش اولر پسرو	روش یک‌چهارم گام
1	0.0000	0.0000
2	0.2127	0.2127
3	0.4254	0.4254
4	0.6380	0.6380
5	0.8507	0.8507

بررسی دقت. باتوجه به این‌که حل دقیق برای این مسئله‌ها موجود نمی‌باشد پاسخ‌های به‌دست‌آمده از گام زمانی بسیار کوچک ($\Delta t = 1 \times 10^{-5}\text{sec}$)، به‌عنوان پاسخ‌های دقیق درنظر گرفته می‌شود. برای بررسی مناسب دقت نتیجه‌های به‌دست‌آمده، خطای نسبی تنش‌های به‌هنگام‌شده با رابطهٔ زیر محاسبه می‌گردد:

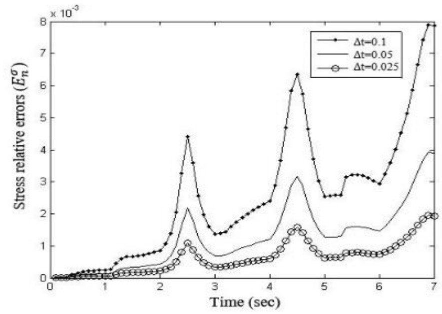
$$E_n^\sigma = \frac{\|\sigma_n - \bar{\sigma}_n\|}{\|\bar{\sigma}_n\|} \tag{۵٤}$$

در رابطهٔ بالا، $\bar{\sigma}_n$ بردار تنش دقیق و σ_n بردار تنش به‌هنگام‌شده در لحظهٔ $t = t_n$ می‌باشد.

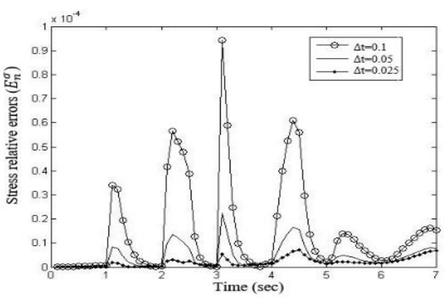
نمودار خطای نسبی برای حالتی که متغیرها از وسط گام مومسانی برداشت می‌شوند و همچنین برای حالتی که متغیرها از یک‌چهارم گام مومسانی برداشت می‌شوند برای گام‌های زمانی متفاوت در شکل‌های (٤-۱۱) رسم می‌شود. در زیرنویس شکل‌هایی که درادامه می‌آیند منظور از m، ماده و p، مسیر می‌باشد.



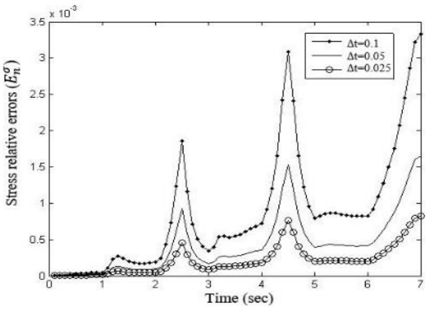
شکل ٤ خطای نسبی تنش (وسط گام- مادهٔ ۱- مسیر ۱)



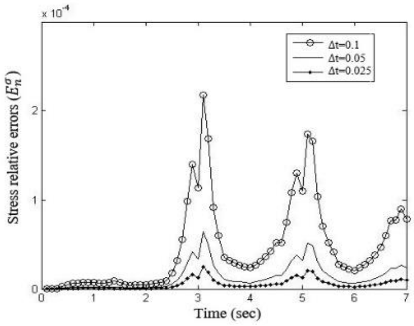
شکل ۵ خطای نسبی تنش
(یک‌چهارم گام- مادهٔ ۱- مسیر ۱)



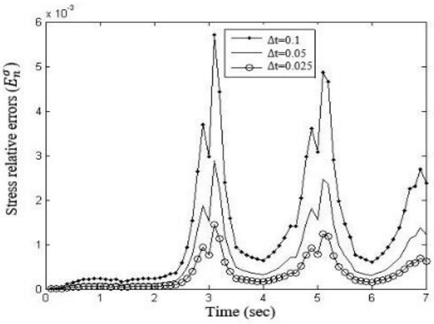
شکل ٦ خطای نسبی تنش
(وسط گام- مادهٔ ۲- مسیر ۱)



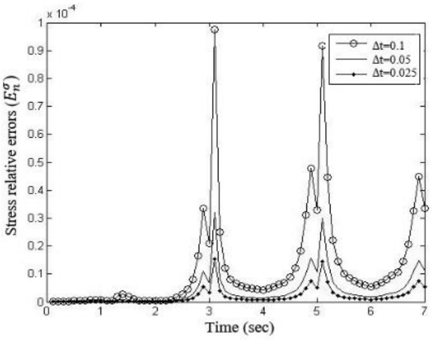
شکل ۷ خطای نسبی تنش
(یک‌چهارم گام- مادهٔ ۲- مسیر ۱)



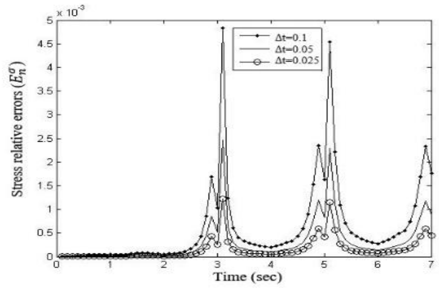
شکل ۸ خطای نسبی تنش (وسط گام- مادهٔ ۱- مسیر ۲)



شکل ۹ خطای نسبی تنش
(یک‌چهارم گام- مادهٔ ۱- مسیر ۲)



شکل ۱۰ خطای نسبی تنش (وسط گام- مادهٔ ۲- مسیر ۲)



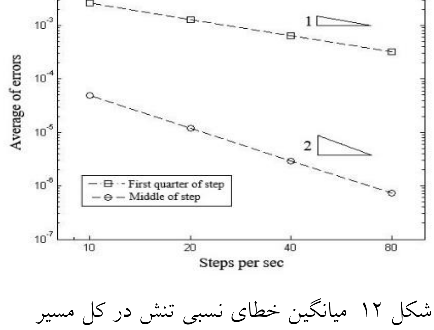
شکل ۱۱ خطای نسبی تنش
(یک‌چهارم گام- مادهٔ ۲- مسیر ۲)

همان‌گونه که شکل‌های (۱۱-٤) نشان می‌دهند، هم دقت پاسخ‌ها کمتر شده و هم نرخ هم‌گرایی پاسخ‌ها به پاسخ دقیق کاهش یافته‌است. به‌منظور بررسی بهتر نرخ هم‌گرایی، میانگین خطای نسبی در کل مسیر با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

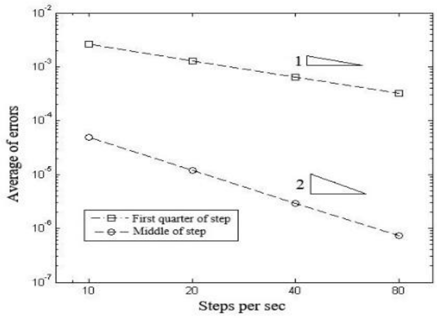
$$E_T^\sigma = \frac{1}{N}\sum\frac{\|\sigma_n-\bar{\sigma}_n\|}{\|\bar{\sigma}_n\|} \qquad (۵۵)$$

میانگین خطای نسبی برای گام‌های زمانی متفاوت برای هر یک از حالت‌های برداشت متغیرها، جداگانه محاسبه شده، نمودارهای لگاریتمی آن رسم گردیده و در شکل‌های (۱۵-۱۲) ارائه شده‌است.

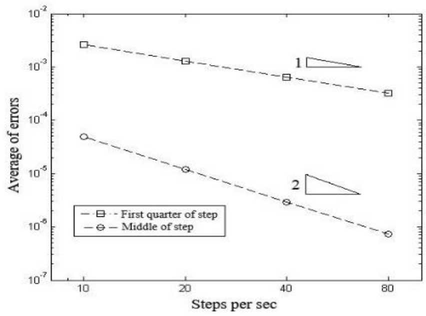
شکل‌های (۱۵-۱۲) به‌روشنی نشان می‌دهند که نرخ هم‌گرایی به پاسخ دقیق درحالتی‌که متغیرها از وسط گام مومسانی برداشت می‌شود از مرتبه ۲ و برای حالتی که متغیرها از یک‌چهارم گام برداشت می‌شود از مرتبه ۱ است. بنابراین نرخ هم‌گرایی نیز کاهش یافته‌است.



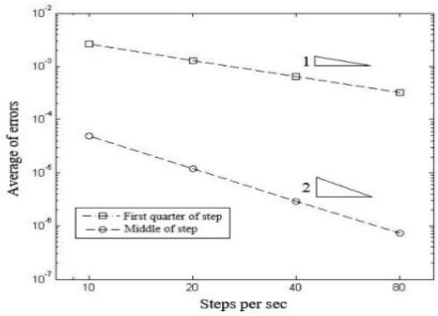
شکل ۱۲ میانگین خطای نسبی تنش در کل مسیر
(مادهٔ ۱- مسیر ۱)



شکل ۱۳ میانگین خطای نسبی تنش در کل مسیر
(مادهٔ ۲- مسیر ۱)



شکل ١٤ میانگین خطای نسبی تنش در کل مسیر
(مادهٔ ۱- مسیر ۲)



شکل ۱۵ میانگین خطای نسبی تنش در کل مسیر
(مادهٔ ۲- مسیر ۲)

نتیجه‌گیری

در این مقاله، به بررسی روش نگاشت‌نمایی نیمه‌ضمنی برای سخت‌شوندگی‌های درهم همگن و پویای خطی پرداخته شد. برای آن‌که بتوان شعاع را از یک‌چهارم گام مومسانی برداشت نمود، رابطه‌سازی لازم صورت

گرفت. آزمون‌های عددی به این صورت طرح گردید که دو مسیر بارگذاری کرنش معلوم درنظر گرفته شد سپس برای دو مادهٔ پنداشت‌شده تنش‌ها به‌هنگام شدند.

در آزمون‌های عددی، به‌هنگام‌سازی تنش در دو حالت صورت پذیرفت. در حالت اول شعاع و متغیرهای مومسانی از وسط گام مومسانی برداشت شد و در حالت دوم متغیرها از یک‌چهارم گام مومسانی برداشت گردید. در هر حالت، تنش‌های به‌هنگام‌شده برای گام‌های زمانی متفاوت با پاسخ‌های دقیق مقایسه گردید، خطای نسبی تنش محاسبه شد و در نمودارهایی ترسیم گردید. برپایهٔ تحلیل‌های صورت‌گرفته می‌توان دریافت که در روش نیمه‌ضمنی برپایهٔ نگاشت‌نمایی، در حالت اول که شعاع سطح تسلیم از میانه گام مومسانی برداشت می‌شود دقت پاسخ‌ها به‌صورت چشم‌گیری بیشتر از حالت دوم است که شعاع از یک‌چهارم گام مومسانی برداشت می‌شود. همچنین نرخ هم‌گرایی به پاسخ دقیق برای حالت اول از مرتبه ۲ و برای حالت دوم از مرتبه ۱ می‌باشد.

پژوهش‌هایی که دقت روش‌های تابع‌اولیه‌گیری از معادله‌های بنیادی مومسانی را بررسی می‌کنند از این جهت دارای اهمیت هستند که در تابع‌اولیه‌گیری، هرچه دقت روش مورداستفاده افزایش یابد می‌توان از آن در تحلیل گام‌های زمانی بزرگ‌تری استفاده نمود. بنابراین هم‌چنان‌که دقت مورد نیاز برآورده می‌شود، زمان تحلیل کاهش می‌یابد که یکی از عامل‌های بسیار مهم در تحلیل و طراحی سازه‌ها است.

مراجع

1. Wilkins, M.L., "*Calculation of Elastic-plastic Flow*", Method of Computational physics, Vol. 3, Academic press, (1964).
2. Kreig, R.D. and Kreig, D.B., "Accuracies of Numerical Solution for the Elastic-perfectly Plastic Model", *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 99, No. 4, pp. 510–515, (1977).
3. Ristinmaa, M. and Tryding, J., "Exact Integration of Constitutive Equations in Elastoplasticity", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, No. 15, pp. 2525–2544, (1993).
4. Szabó, L., "A Semi-analytical Integration Model for J_2 Flow Theory of Plasticity with Linear Isotropic Hardening", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, No. 27-29, pp. 2151–2166, (2009).
5. Hong, H-K. and Liu, C-S., "Internal Symmetry in Bilinear Elastoplasticity", *International Journal for Non-Linear Mechanics*, Vol. 34, No. 2, pp. 279–288, (1999).
6. Auricchio, F. and Beirão da Veiga, L., "On a New Integration Scheme for Von-Mises Plasticity with Linear Hardening", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 56, No. 10, pp. 1375-1396, (2003).
7. Liu, C.-S., "International Symmetry Groups for the Drucker-Prager Material Model of Plasticity and Numerical Integrating Methods", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, No. 14, pp. 3771-3791, (2004).
8. Artioli, E., Auricchio, F. and Beirão da Veiga, L., "Integration Scheme for Von-Mises Plasticity Models based on Exponential Maps: Numerical Investigations and Theoretical Considerations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 64, No. 9, pp. 1133-1165, (2005).
9. Artioli, E., Auricchio, F. and Beirão da Veiga, L., "A Novel 'Optimal' Exponential-based Integration Algorithm for Von-Mises Plasticity with Linear Hardening: Theoretical Analysis on yield

Consistency, Accuracy, Convergence and Numerical Investigations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 67, No. 4, pp. 449-498, (2006).

10. Artioli, E., Auricchio, F. and Beirão da Veiga, L., "Second-order Accurate Integration Algorithms for Von-Mises Plasticity with a Nonlinear Kinematic Hardening Mechanism", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, No. 9, pp. 1827-1846, (2007).
11. Rezaiee-Pajand, M. and Nasirai, C., "Accurate Integration Scheme for Von-Mises Plasticity with Mixed-Hardening based on Exponential Maps", *Engineering Computations*, Vol. 24, No. 6, pp. 608-635, (2007).
12. Rezaiee-Pajand, M. and Nasirai, C., "On the Integration Scheme for Drucker-Prager's Elastoplastic Models based on Exponential Maps", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 74, No. 10, pp. 799-826, (2008).
13. Rezaiee-Pajand, M., Nasirai, C. and Sharifian, M., "Application of Exponential-based Methods in Integrating the Constitutive Equations with Multi-component Nonlinear Kinematic Hardening", *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 136, No. 12, pp. 1502-1518, (2010).
14. Rezaiee-Pajand, M., Nasirai, C. and Sharifian, M., "Integration of Nonlinear Mixed Hardening Models", *Multidiscipline Modeling in Materials and Structures*, Vol. 7, No. 3, pp. 266-305, (2011).
15. Rezaiee-Pajand, M. and Sharifian, M., "A novel Formulation for Integrating Nonlinear Kinematic Hardening Drucker-Prager's Yield Condition", *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 31, No. 1, pp. 163-178, (2011).
16. Rezaiee-Pajand, M. Sharifian, M. and Sharifian, M., "Accurate and Approximate Integrations of Drucker-Prager Plasticity with Linear Isotropic and Kinematic Hardening", *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 30, No. 3, pp. 345-361, (2011).
17. Rezaiee-Pajand, M., Auricchio, F., Sharifian, M. and Sharifian, M., "Computational Plasticity of Mixed Hardening Pressure-dependency Constitutive Equations", *Acta Mechanica*, Vol. 225, No. 6, pp. 1699-1733, (2013).

پیوست

در این بخش چگونگی دست‌یابی به دستگاه رابطه زیر بیان می‌گردد [11]:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbb{A}\mathbf{X} \tag{۵۶}$$

از ترکیب دو رابطه (۶ و ۷) و مشتق‌گیری نسبت به زمان رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} + \dot{\boldsymbol{\alpha}} + 2G\dot{\mathbf{e}}^{\mathrm{p}} = 2G\dot{\mathbf{e}} \tag{۵۷}$$

سپس، رابطه (۱۲) در (۵۷) قرار داده می‌شود:

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} + (2G + H_{\mathrm{kin}})\dot{\mathbf{e}}^{\mathbf{p}} = 2G\dot{\mathbf{e}} \tag{۵۸}$$

و رابطه‌های (۱۰ و ۱۱) در رابطه بالا جایگذاری می‌گردد:

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} + (2G + H_{\mathrm{kin}})\frac{\boldsymbol{\Sigma}}{R}\dot{\gamma} = 2G\dot{\mathbf{e}} \tag{۵۹}$$

رابطه کنونی به‌صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = 2G\dot{\mathbf{e}} - (2G + H_{\mathrm{kin}})\overline{\boldsymbol{\Sigma}}\dot{\gamma} \tag{۶۰}$$

از رابطه بالا نسبت به زمان مشتق گرفته می‌شود، با جایگذاری رابطه (۹) در آن می‌توان به رابطه زیر رسید:

$$\dot{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}} + \frac{2G+H_{\mathrm{iso}}+H_{\mathrm{kin}}}{R}\dot{\gamma}\overline{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{2G}{R}\dot{\mathbf{e}} \tag{۶۱}$$

فاکتور تابع‌اولیه‌گیری X^0 به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{d}{dt}(X^0\overline{\boldsymbol{\Sigma}}) = \frac{2G}{R}X^0\dot{\mathbf{e}} \tag{۶۲}$$

در این رابطه، مشتق‌گیری نسبت به زمان انجام می‌شود و رابطه به‌دست آمده بر X^0 تقسیم می‌گردد:

$$\dot{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}} + \frac{\dot{X}^0}{X^0}\overline{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{2G}{R}\dot{\mathbf{e}} \tag{۶۳}$$

مقایسه (۶۱ و ۶۳) و جایگذاری (۹) نتیجه زیر را در بردارد:

$$\frac{\dot{X}^0}{X^0} = \frac{2G+H_{\mathrm{iso}}+H_{\mathrm{kin}}}{R_0+H_{\mathrm{iso}}\gamma}\dot{\gamma} \tag{۶۴}$$

پاسخ معادله بالا با شرط اولیه $X^0(0) = 1$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$X^0(\gamma) = \begin{cases} \left(1 + \frac{H_{\mathrm{iso}}}{R_0}\gamma\right)^{\left(\frac{2G+H_{\mathrm{kin}}+H_{\mathrm{iso}}}{H_{\mathrm{iso}}}\right)} & H_{\mathrm{iso}} \neq 0 \\ exp\left(\frac{2G+H_{\mathrm{kin}}}{R_0}\gamma\right) & H_{\mathrm{iso}} = 0 \end{cases} \tag{۶۵}$$

باتوجه به تعریف بردار تنش افزوده در (۱۵) و رابطه (٦٢)، رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\dot{\mathbf{X}}^{s} = \frac{2G}{R} X^{0} \dot{\mathbf{e}} \quad (٦٦)$$

چون در محدوده کشسانی $\dot{\gamma} = 0$ می‌باشد، با نگاهی به (٦٤):

$$\dot{X}^{0} = 0 \quad (٦٧)$$

درمحدوده مومسانی که X^{0} ثابت نیست، (٦٣) را در $\overline{\boldsymbol{\Sigma}}^{\mathrm{T}}$ ضرب نموده و رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{\boldsymbol{\Sigma}}\|^{2} + \frac{\dot{X}^{0}}{X^{0}}\|\overline{\boldsymbol{\Sigma}}\|^{2} = \frac{2G}{R}\dot{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{\Sigma}} \quad (٦٨)$$

از آنجا که $\overline{\boldsymbol{\Sigma}} = 1$ می‌باشد پس از ضرب X^{0} در (٦٨)، این رابطه به‌شکل زیر در می‌آید:

$$\dot{X}^{0} = \frac{2G}{R}\dot{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{s} \quad (٦٩)$$

چنانچه شکل فشرده $\dot{\mathbf{X}} = \mathbb{A}\mathbf{X}$ در نظر گرفته شود، با نگاهی به رابطه‌های (۲۹–۲٦) ماتریس $\mathbb{A}$ به راحتی محاسبه می‌گردد:

$$\mathbb{A}_{\mathbf{e}} = \frac{2G}{R}\begin{bmatrix} \mathbb{O}_{9\times 9} & \dot{\mathbf{e}}_{9\times 1} \\ \mathbf{0}_{1\times 9} & 0 \end{bmatrix}_{10\times 10} \text{ : محدوده کشسان} \quad (٧٠)$$

$$\mathbb{A}_{\mathbf{p}} = \frac{2G}{R}\begin{bmatrix} \mathbb{O}_{9\times 9} & \dot{\mathbf{e}}_{9\times 1} \\ \dot{\mathbf{e}}^{T}{}_{1\times 9} & 0 \end{bmatrix}_{10\times 10} \text{ : محدوده مومسان} \quad (٧١)$$